國立臺灣大學九十四學年度轉學生入學考試試題

科目： 微積分(B)

題號：21
共 一 頁之第 全 頁

一、填充題：(一共 10 格，每格 7 分，請依空格的標號將答案寫在答案卷上。)

1. 求極限值 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$。

2. 假設 $f(x)=x^n$ 與 $g(x)=\sqrt[n]{x}$ 所圍成領域的面積為 $\dfrac{1}{2}$，求 n 的值。

3. 求函數 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的最大值。

4. 設 $f(x)=\begin{cases} 2x-2, & 當\ x<-1, \\ Ax+B, & 當\ -1\le x\le 1, \\ 5x+7, & 當\ x>1. \end{cases}$ 求 A 與 B 使得 f 為一個連續函數。

5. 求定積分 $\int_2^4 \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$。

6. 求瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$。

7. 求冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ 的收斂區間。

8. 判別無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ 的收斂或發散。

9. 求線積分 $\oint_\Gamma(\sin x+y^2)\,dx+(x+\sqrt{1+e^y})\,dy$，其中 Γ 為由 $y=0,\ x=1,$ $y=x^2$ 所組成的逆時針方向之封閉路徑。

10. 求 $f(x,y,z)=x^3e^y+xz$，在 $(1,2,3)$ 點且在 $\bar{v}=0\bar{i}+(3/\sqrt{5})\bar{j}+(4/\sqrt{5})\bar{k}$ 方向的方向導數。

二、計算題：(兩大題，各 15 分，共 30 分。注意：若無計算過程，不予計分。)

1. 假設 f 為定義在實數系 $\mathbb{R}$ 上的連續函數，滿足

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_x^1 t^2 f(t)\,dt+\frac{x^{10}}{5}+\frac{x^{12}}{6}+C$$

其中 C 為常數。試求 $f(x)$ 與 C。

2. 設 D 為由柱面 $x^2+y^2=4$、平面 $x+z=6$ 與 xy 平面所圍成的立體。求向量場 $\bar{F}(x,y,z)=(x^2+\sin z)\bar{i}+(xy+\cos z)\bar{j}+e^y\bar{k}$ 流出 D 的通量(flux)。

試題必須隨卷繳回