

一、(每小題5分共20分) 考慮熱力學第一定律應用於氣象科學

$$c_p dT - \frac{1}{\rho} dp = -Ldw_s$$

其中 w_s 為飽和水氣混合比, L 為潛熱常數, c_p 為空氣定壓比熱常數。

- (a) 若大氣靜力平衡且未飽和 ($dw_s = 0$), 導出乾絕熱降溫率。下沉乾空氣每公里氣塊上升多少度?
- (b) 若大氣靜力平衡且飽和, 而且簡化 $w_s = w_s(T)$ 是溫度函數, 導出濕絕熱降溫率, 並和乾絕熱降溫率比較大小。
- (c) 除了飽和混合比隨溫度增加 ($dw_s/dT > 0$), 而且 $d^2w_s/dT^2 > 0$ (dw_s/dT 值隨溫度增加), 冰河世界和極端暖化的世界, 何者其濕絕熱降溫率較大 (降溫較快)?
- (d) 何謂「條件性不穩度」? 畫「條件性不穩度」情形下 $\theta, \theta_e, \theta_e^*$ (位溫, 相當位溫, 飽和相當位溫) 垂直分佈圖, 並討論大氣「邊界層」的「溫度」和「水氣含量」對「條件性不穩度」之影響。($\theta_e \approx \theta + 0.25q(g/kg)$, q 為水氣混合比, θ_e^* 為 q 取飽和值之相當位溫。)

二、(每小題10分共20分) Rankine vortex 被廣泛的應用於颱風研究, 其切線風速數學關係式為

$$v(r) = \begin{cases} v_m (r/r_m), & 0 \leq r \leq r_m; \\ v_m (r_m/r), & r_m \leq r \leq \infty. \end{cases}$$

在此 r 為半徑, v_m 為渦旋最大風速值(已知), r_m 渦旋最大風速半徑值(已知)。渦度公式為

$$\zeta = \frac{\partial rv}{r\partial r} = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

計算下列值並繪製其對應半徑函數圖

- (a) 曲率渦度 (curvature vorticity), 切線渦度 (shear vorticity)
- (b) 相對渦度 (relative vorticity), 以 r 為圓的環流 (circulation)

三、(每小題5分共10分) 考慮向量 Ekman 方程式, $\mathbf{V} = (u, v)$, \mathbf{k} 是垂直方向基本向量,

$$K \frac{d^2 \mathbf{V}}{dz^2} = f\mathbf{k} \times \mathbf{V} - f\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g$$

- (a) 若等壓線和 x 方向平行, 畫出邊界層螺旋狀的風場 (Ekman spiral), 畫出邊界層對應的 $Kd^2\mathbf{V}/dz^2$ 螺旋狀分佈。
- (b) 考慮 $\mathbf{V}_g = 0$ 的海洋, 試導出下式說明北半球海洋邊界層質量傳送是地表風切90度向右。

$$\mathbf{M}_a = \int_{-\infty}^0 \rho \mathbf{V} dz = -\frac{\rho K}{f} \mathbf{k} \times \left(\frac{d\mathbf{V}}{dz} \right)_{z=0}$$

沿赤道的海洋吹西風或東風時, 何種情況會產生湧昇流 (upwelling), 為什麼?

四、(每小題5分共15分) 考慮在 β 面 Rossby wave 方程式

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \psi = \sum_{kl\omega} \hat{\psi}_{kl\omega} e^{ikx + ily - i\omega t}$$

其中 β 是視為常數的行星渦度梯度。

- (a) 請解釋波數 k, l 和 $(k^2 + l^2)^{1/2}$ 的意義。說明為何相速 (phase speed) 不是向量關係。
- (b) 導 Rossby wave 頻散關係, 並導出東西方向群速與相速。長波和短波的群速有何不同。
- (c) 繪出 $\psi, \nabla^2 \psi$ (渦度) 以及 $\beta \partial \psi / \partial x$ 相對相位圖, 並討論波動機制。

五、(20分) 何謂斜壓與正壓不穩度? 此二不穩度發生之尺度有何不同特性? 分別討論其能量轉換特性?

六、(每小題5分共15分) 以準地轉理論渦度平流與溫度平流討論

- (a) 解釋熱力風平衡, 那個季節中緯度高空有較強的西風?
- (b) 控制高度場 ϕ 變化的機制 (tendency 方程式的意義)
- (c) 控制垂直運動的機制 (ω 方程式的意義)