1. (a) (10%) 已知$e^{-2t}+2e^{-t}$為常微分方程式 $y''+Ay'+By=0$之解，請問係數 A 與 B 為何?

   (b) (10%) 同上題若方程式之解為te^{-t}，請問係數 A 與 B 為何?

2. (15%)已知一 3x3 矩陣$A=\begin{bmatrix} 0 & f & -ik \\ -f & 0 & 0 \\ -gHik & 0 & 0 \end{bmatrix}$且$i=\sqrt{-1}$，請問 (a) 判別式 $\det A=|A|$? (b) 特徵值 (eigenvalues)? (c) 特徵性量(eigenvectors)?

3. (15%)已知 $u(x,y)$為連續函數且一階及二階微分在簡單及封閉的曲線 C(及 C 的內部區域 D)內皆為連續，證明

$$\oint_C -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=\iint_D[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]dA$$

4. (15%)慣性振盪是海洋與大氣中常見的現象，可用以下方程式組描述

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v,\frac{\partial v}{\partial t}=-u$$

   u, v 分別為東西及南北方向速度，請將上述方程式寫成矩陣形式(matrix form)並求所伴隨的特徵值 (eigenvalues)與特徵性量(eigenvectors)，並請依可能的物理現象設定所需的初始條件求解。

5. (10%)請說明下列方程式名稱與方程式各項物理意義，並舉例說明可以應用的實例。

   (a) $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=C^2\nabla^2 p$

   (b) $\frac{\partial p}{\partial x}=v\nabla^2 p$

6. (25%) 請利用分離變數法(Separation of variables)以及傅立葉轉換(Fourier Transform)求解下列方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty<x<\infty, t>0$$

初始條件為

$$u(x,0)=e^{-4|x|}, -\infty<x<\infty$$

試題隨卷繳回