

I. 統計個案分析 (共 50 分)

芳緣地區神奇寶貝中心調查皮卡丘<sup>[M]</sup>族群的分布，於去年隨機蒐集到 15 隻皮卡丘的資料如下表。研究員小霞依據實驗過程，欲逐步檢驗 10 個統計問題。請幫小霞依序回答下列問題；各題請附上計算過程，每題 5 分。

[附註]: 皮卡丘為鼠科神奇寶貝；特徵是臉頰部位可發電；部分台灣學者稱之為閃電鼠。

皮卡丘編號	性別	今年體重 (單位:公斤)	去年體重	今年發電量 $e_{1,i}$ (單位: 萬伏特)	去年發電量 $e_{0,i}$
1	公	3	2	3	4
2	母	4	4	4	5
3	公	6	5	6	4
4	母	1	1	3	2
5	母	2	3	5	6
6	公	7	7	6	7
7	母	5	5	7	8
8	母	2	3	6	7
9	母	3	2	2	3
10	公	4	4	4	6
11	母	5	4	5	4
12	母	6	5	8	9
13	公	7	6	9	5
14	公	8	6	10	6
15	公	10	7	10	8

1. 從這 15 隻皮卡丘隨機抽出 5 隻，請問抽到 3 隻公皮卡丘的機率是多少？
2. 請問去年和今年皮卡丘發電量平均數分別為  $\bar{e}_0$  和  $\bar{e}_1$ ；去年和今年皮卡丘發電量中位數分別  $e_0^{me}$  和  $e_1^{me}$ 。請計算  $\bar{e}_0$ 、 $\bar{e}_1$ 、 $e_0^{me}$  和  $e_1^{me}$ 。
3. 請問皮卡丘發電量變化(等於今年發電量減去年發電量( $e_{1,i} - e_{0,i}$ ))的中位數為何？皮卡丘發電量變化的中位數與第 2 題的  $e_0^{me} - e_1^{me}$  是否一致？請評論何者在統計學應用上較有意義。(2+3 分)
4. 若你想要檢定  $\bar{e}_0$  和  $\bar{e}_1$  是否有差異，並建立虛無假說  $H_0: E(e_1) = E(e_0)$ ；請計算檢定統計量以及檢定兩平均數在 5% 顯著水準下，是否有顯著差異。
5. 小霞也想要檢定  $\bar{e}_0$  和  $\bar{e}_1$  是否有差異，並引用下列公式計算  $t$  統計量：

$$t = \frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_0 - 0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{15} + \frac{\hat{\sigma}_0^2}{15}}} = 0.32, \hat{\sigma}_0^2 \text{ 和 } \hat{\sigma}_1^2 \text{ 分別為去年和今年皮卡丘發電量的樣本變異數。 你的答案}$$

和小霞的答案是否相同？如果不同，請論述為何你的方法比較正確？

6. 令每一隻皮卡丘去年到今年體重變化量為  $y$ ，根據計算得知其樣本標準差為  $\hat{\sigma}_y = 1.056$ 。建立虛無假說  $H_0: E(y) = 2.201$ ；請計算對立假說  $H_1: E(y) = 3$  下的檢定力(power)值(下表為  $t$  分配臨界值表[ $df=14$ ]，請以 5% 顯著水準及雙尾檢定之)。

見背面

$t$ 臨界值	-0.868	-0.907	-0.946	-0.988	-1.031	-1.076	-1.124	-1.174	-1.227	-1.284
Prob.	0.2	0.19	0.18	0.17	0.16	0.15	0.14	0.13	0.12	0.11
$t$ 臨界值	-1.345	-1.411	-1.484	-1.565	-1.656	-1.761	-1.887	-2.046	-2.264	-2.624
Prob.	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01

7. 如果小霞建立迴歸模型為  $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 Male + \alpha_2 Female + Weight_{0,i} + \varepsilon_i$ 。  $Male$  和  $Female$  為兩個虛擬變數。 $Male=1$  表示公皮卡丘； $Male=0$  表示母皮卡丘。 $Female=1$  表示母皮卡丘； $Female=0$  表示公皮卡丘。 $Weight_0$  表示去年皮卡丘的體重。小霞用 SAS 軟體計算後，卻得不出迴歸統計結果。請你幫忙判斷小霞的迴歸模型哪裡出了問題，並幫她修正該模型。
8. 小霞另外建立迴歸模型  $e_{1,i} = \beta_0 + \beta_1 y_i + v_i$ ，請計算其迴歸判定係數以及調整的判定係數 (2+3 分)。
9. 小霞欲建立迴歸模型  $e_{1,i} = \beta_0 + \beta_1 y_i + v_i$  的 ANOVA，請幫她建立 ANOVA 的虛無假說，並把下表完成。

	自由度	SS	MS	F 值
迴歸				
殘差				
總和				

10. 如果以最大概似法(MLE)估計迴歸模型  $e_{1,i} = \beta_0 + \beta_1 y_i + v_i$ ， $v_i \sim N(0, \sigma_0^2)$ ， $v_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma_0^2)$ ，請 MLE 下的計算  $\hat{v}_i$  變異數。

II. 問答與計算題 (共 50 分)

1. 設  $X$ 、 $Y$  與  $Z$  為獨立同態(i.i.d.)的幾何分配  $Geo(p)$ ，其共同的機率質點函數(pmf)為

$$P(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x=1, 2, \dots \\ 0, & \text{其他 } x \end{cases}, \text{ 令 } T=X+Y+Z, \text{ 求}$$

- (1)  $T$  之邊際分配(Marginal pmf)。(需註明分配名稱及參數)。(5 分)
  - (2) 計算  $T$  之階乘動差母函數(Factorial moment generating function, 簡記為 fmgf)。(5 分)
  - (3) 由(2)之結果，計算  $T$  之前兩次階乘動差。(2+3 分)
  - (4) 試說明為何一非負整數之離散隨機變數之 fmgf 又可稱為機率母函數(Probability generating function, 簡記為 pgf)，需推導結果。(5 分)
2. 設  $(X, Y)$  為一三項式分配 trinomial  $(n, p_1, p_2)$
- (1) 試寫出  $(X, Y)$  之聯合機率質點函數(joint pmf)，以及三個參數  $(n, p_1, p_2)$  之參數空間。(3+2 分)
  - (2) 分別計算  $X$  與  $Y$  之邊際分配，需註明分配名稱及參數。(3+2 分)
  - (3) 當  $X=x$  之條件下，計算  $Y|X=x$  之條件 pmf，需註明分配名稱及參數。(4+1 分)
  - (4) 以(3)之結果計算  $E(Var(Y|X))$  及  $Var(E(Y|X))$ ，並檢驗以下等式成立  $Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X))$ 。(1+2+2 分)  
式中  $Var(Y)$  由(2)之結果可得。
3. 設  $X$  表單一隨機樣本，抽自一均勻  $U(0, \theta)$  母體分配，檢定

$H_0: \theta = \frac{3}{8}$  v.s.  $H_1: \theta = \frac{3}{5}$ , 設拒絕域為  $C = \{X | X > \frac{1}{4}\}$

- (1) 計算此檢定之顯著水準  $\alpha$ 。(5 分)
- (2) 計算此檢定之檢定力(Power)。(5 分)

試題隨卷繳回