I. 計算題，每題 5 分(共 35 分，請附上計算過程)

1. 研究者隨機挑選 16 位 A 班同學和 16 位 B 班同學，蒐集他們的期末考分數。A 班同學平均為 76 分，B 班同學平均為 80 分。A 班和 B 班分數的樣本變異數分別為 12 分和 15 分。研究者假設分數遵循常態分配，請問在 5%顯著水準下，檢定 A 班和 B 班同學期末考分數變異數是否相同? (提示，臨界值 $F_{0.95,(15,15)}$=2.4)
2. 請用變異數分析(ANOVA)檢定虛無假說 H_0: $\mu_A=\mu_B$。(提示，臨界值 $F_{0.95,(1,30)}$=4.17)
3. 令迴歸式為 $Y_i=a+b\log(X_i)+c\log(X_i^2)+e_i$，請問斜率參數 c 的估計值變異數 $\mathrm{var}(\hat{c})$ 是多少?

小霞研究皮卡丘身高(Y)和體重(X)是否有關，抽樣 9 隻皮卡丘後，把身高對體重迴歸後，得到下表。請依序回答第 4 到 7 題的問題。

迴歸統計	
R 平方	0.960
調整的 R 平方	0.954
標準誤	S
觀察值個數	9.000

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	1.000	54.612	54.612	167.913	0.000
殘差	7.000	2.277	0.325		
總和	8.000	56.889			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	0.262	0.490	0.536	0.609
體重	2.114	0.163	12.958	0.000

4. 請問迴歸標準誤(S)為多少?
5. 如果我們令迴歸式為 $Y_i=a+bX_i+e_i$，且用最小平方法估計參數 a 和 b。我們將斜率估計式表示為 $\hat{b}=\sum k_iY_i$，k_i 為一非隨機實數，則 $\sum k_i$ 和 $\sum k_iX_i$ 各等於多少? (2+3 分)
6. $\sum k_i^2$ 等於多少?
7. 請問這 9 隻皮卡丘平均體重為多少?

II. 是非題，每題 5 分(共 15 分，須說明理由，如敘述錯誤請更正)

1. 一隨機變數 X 遵循 t 分配，且自由度為 2。抽取 n 個樣本，計算樣本平均數 $\overline{X}$，則根據中央極限定理，n 很大時，$\overline{X}$ 在極限上趨近常態分配。
2. 令 $\hat{\theta}$ 表示 θ_0 的不偏估計式。Z 為一隨機變數，均數和變異數都是 1，且 $\mathrm{cov}(\hat{\theta},Z)=3$。今有一新估計式 $\tilde{\theta}=\hat{\theta}-Z$，則 $\tilde{\theta}$ 相較 $\hat{\theta}$ 有相對較佳的有效性(efficiency)。
3. $\{(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)\}$ 皆為 i.i.d.的隨機變數(注意，X_i 是隨機的)。在下列兩個條件下，
   (i) $\{(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)\}$ 的變異數存在，
   (ii) $Y_i=\alpha_0+\beta_0X_i+V_i$ 且 $E(V_i\,|\,X_i)=0$，$\mathrm{var}(V_i\,|\,X_i)=\sigma_0^2$。
   則最小平方法的估計式(least squares estimator, 記為 $\hat{\alpha}$ 與 $\hat{\beta}$)與對應的檢定統計量依然適用，是因為截距估計式 $\hat{\alpha}$ 和斜率估計式 $\hat{\beta}$ 皆為不偏估計式。

III. 問答與演算題，每小題各 5 分(共 50 分)

1. 設 X 與 Y 為兩個獨立之 Poisson 分配，$X\sim P(1)$，$Y\sim P(3)$，
   (1) 以旋結法(convolution)求其和 $S=X+Y$ 之機率質點函數(pmf)。
   (2) 當 $S=5$ 之條件下，計算 $Y|S=5$ 之條件 pmf，需註明分配名稱及參數。
   (3) 以(2)之結果計算 $E(\mathrm{Var}(Y|S))$ 以及 $\mathrm{Var}(E(Y|S))$，並檢驗以下等式成立:
   $\mathrm{Var}(Y)=E(\mathrm{Var}(Y|S))+\mathrm{Var}(E(Y|S))$。

國立臺灣大學 106 學年度碩士班招生考試試題

2. 令 $\{X_i\}_1^n \overset{i.i.d.}{\sim} Ber(p)$，其 pmf 為 $P_X(x)=\begin{cases} p(1-p)^{1-x}, & \text{if } x=0,1 \\ 0 & \text{, otherwise} \end{cases}$，參數 p 未知。
   (1) 試說明 Bernoulli 分配屬於指數族，並求 p 之一個充分統計量，且驗証之。
   (2) 求參數 p 之動差估計元，記為 $\hat{\theta}$，$\hat{\theta}$ 是否為 p 之不偏與均方差一致性估計元？需推導結果。
   (3) 當樣本數 n 夠大(n>30)且固定，試寫出 X_i 之變異數 MLE 估計元，記為 $\hat{\tau}$，試寫出 $\hat{\tau}$ 之漸近分配，需註明分配名稱及參數。

3. 令 $\{X_i\}_1^n$ 為一組來自均勻分配 $U[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]$ 母體之隨機變數，θ 未知。
   (1) 試寫出 θ 之參數空間，並說明均勻分配是否屬於指數族?
   (2) 求 θ 之動差估計元，記為 $\hat{\theta}$，並計算 E($\hat{\theta}$)、Var($\hat{\theta}$)。
   (3) 証明(2)中之 $\hat{\theta}$ 機率收斂至 θ (converge in probability)。
   (4) 求 θ 之最大概似估計元，記為 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$，此估計元是否為唯一? 需述理由。

試題隨卷繳回