

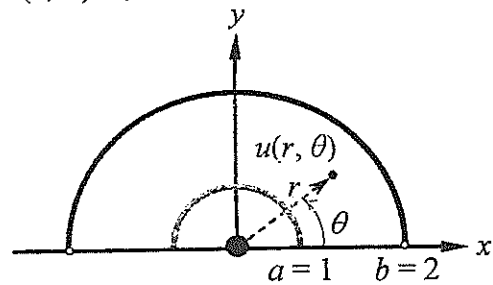
請於答案卷上作答，於試題卷上作答者，不予計分。

1. 求解微分方程式： $(x+1)y \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 - 5, y(0) = 1$ 。【計分：10分】
2. 求解微分方程式： $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$ 。【計分：10分】
3. 求解微分方程式： $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = u(t - \frac{1}{4}\pi)\sin t, y(0) = 1, y'(0) = 0$ ，當中的 $u(t)$ 是單位步階函數(unit step function)。【計分：10分】
4. 求解積分方程式： $y(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t y(\tau)e^{-\tau} d\tau$ 。【計分：10分】
5. 求出 e^{At} ，當中的 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。【計分：10分】
6. 已知邊界值問題 (Boundary-Value Problem)：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(2) = 0$$
 - (1) 試寫出此邊界值問題的 Self-Adjoint Form。【計分：3分】
 - (2) 試求此邊界值問題的固有值 (Eigenvalues) 與固有函數 (Eigenfunctions)。【計分：10分】
 - (3) 寫出這個邊界值問題的正交性關係式 (Orthogonality Relation)。【計分：2分】
7. 試求 $\iint_R [1 - 2(y-1)] dA = ?$ 此處， R 代表由圓 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 與直線 $x = 0$ 所包圍且座落在第一象限內的區域(Region)。【計分：15分】
8. 考慮下圖所示的半圓型金屬板所圍成區域內的穩態溫度 $u(r, \theta)$ ，其中兩金屬板的半徑分別為 $a = 1$ 與 $b = 2$ ，且邊界條件為

$$u(1, \theta) = 0, u(2, \theta) = 0, 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, u(r, \pi) = r, 1 < r < 2$$
 - (1) 寫出 $u(r, \theta)$ 的偏微分方程式。【計分：3分】
 - (2) 求解穩態溫度 $u(r, \theta)$ 。【計分：17分】



試題隨卷繳回