將答案寫在答案卷上，請標明題號與格號，並依序作答。所有數字必須化為最簡分數。試題共分二部分。第一部份為填充題，八題共計七十二分，每題每格分數見該題個別指定。第二部份為計算證明題，第一題十六分，第二題十二分，二題合計二十八分。

一、填充題

1. 求整數 $k$ 使得極限 $L = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2(\theta^k/3)}{(1-\sec\theta)^3}$ 存在且非零，則 $(k, L) =$ ___(1)___。（8 分）

2. 令 $f(x) = \int_{x^2}^{x^5} \sin(t^3)\,dt$，則 $(f(-1), f'(-1)) =$ ___(2)___。（8 分）

3. 設 $y = y(x)$ 為滿足 $x^4+xy^2+y^3+1=0$ 在 $(x,y)=(-1,-1)$ 的鄰域（附近）所定義的可微分函數。則 $y'(-1) =$ ___(3a)___（4 分），而 $y = y(x)$ 在 $x = -1$ 的鄰域（附近）之行為（遞增或遞減、向上凹或向下凹）為 ___(3b)（請填入：『遞增』或『遞減』）___（4 分），且 ___(3c)（請填入：『向上凹』或『向下凹』）___（4 分）。

4. 令 $T(x)$ 為 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 在 $x = 0$ 的 Taylor 展開式。則 $T(x) =$ ___(4a)（必須寫出一般式）___（4 分），$T(x)$ 的收斂半徑為 ___(4b)___（4 分），利用 $T(x)$ 的最前二個非零項估計 $\ln 3$ 所得之近似值為 ___(4c)___（4 分）。

5. 計算 $\int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx\right) dy =$ ___(5)___（8 分）。

6. 令 $D$ 為 $2x+3y=0$，$2x+3y=2$，$3x+2y=3$ 與 $3x+2y=-3$ 所圍成的平行四邊形及其內部，計算 $\iint_D x\,dA =$ ___(6)___（8 分）。

7. 計算 $r = 1+\sin\theta$ 所圍成區域的面積 $=$ ___(7a)___（4 分），並計算二重積分 $\iint_{B(a)} \frac{dA}{\sqrt{1+x^2+y^2}} =$ ___(7b)___（4 分），此處 $B(a) = \{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le a^2\} \subset \mathbb{R}^2$，$a > 0$。

8. 已知三維向量場 $\mathbf{F} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2ze^{-2y}\right)\mathbf{j} + e^{-2y}\mathbf{k}$ 為保守場，則其所有可能的 potential function 為 ___(8a)___（4 分）。令參數曲線 $C$：$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \pi\cos t\,\mathbf{j} + \pi\sin t\,\mathbf{k}$，$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$，且 $\mathbf{T}$ 為 $C$ 上的單位切向量，則線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$ ___(8b)___（4 分）。

見背面

二、計算證明題

1.（16 分）求函數 $z = x^3 - 4x + xy^2 + y^2$ 的所有臨界點 (critical point)，並判斷其為局部極大、極小、或是鞍點 (saddle point)。不必計算各點的函數值。

2.（12 分）

(a) 令 $\beta > \alpha > 0$。證明存在 $\theta_0 = \theta_0(\alpha, \beta)$ 使得 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta = (\cos\theta_0)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$。

(b) 利用上式證明 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta$ 收斂。

(c) 令 $M > 1$。導出 $\displaystyle\int_1^M \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta$。

(d) 證明 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$ 與 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$ 皆收斂。

試題隨卷繳回