※禁止使用計算機

作答時若需要可以引用下列兩定理，但必須 (由題設出發) 說明它們的條件是滿足的。

A. (Abel 定理) 給定數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及一數 x_0。若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0{}^n$ 收斂，則對任何意的 $t \in [0,1)$，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (tx_0)^n$ 收斂且 $\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (tx_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0{}^n$。

B. (隱函數定理) 給定 $\mathbf{R}^2$ 中的一個開集合 U、定義於 U 上的一個光滑 (C^∞) 函數 $f(x,y)$，以及 U 中一點 (a,b)。若 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$，則存在 $r>0$ 與 $r'>0$ 以及定義在 $(a-r,a+r)$ 上的一個光滑 (C^∞) 函數 $h(x)$ 使得

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in U \,|\, f(x,y)=0\} &\cap \big[(a-r,a+r)\times(b-r',b+r')\big] \\ &= \{(x,h(x)) \,|\, x\in(a-r,a+r)\}.\end{aligned}$$

●計算與證明題 (每題 20 分，未寫出計算或論證過程不給分，不得使用計算機)

1. 請計算集合 $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, 2x^2+z^2 \leqslant 1,\, 3y^2+z^2\leqslant 1\}$ 的體積。

2. 假設 $f(x,y)$ 與 $g(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的兩個光滑 (C^∞) 函數。令 $S=\{(x,y)\,|\,f(x,y)=0\}$。請證明，如果 $p=(a,b)$ 是 S 中一點，同時 $\frac{\partial f}{\partial x}(p)=-4$、$\frac{\partial f}{\partial y}(p)=2$、$\frac{\partial g}{\partial x}(p)=12$、$\frac{\partial g}{\partial y}(p)=-6$ 且

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(p)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(p) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},$$

則存在 $R>0$ 使得對所有 $q\in S\cap\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<R^2\}$ 總有 $g(p)<g(q)$。

3. 令 $B=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$。請計算以下積分

$$\iiint_B \cosh(x+y+z)\,dx\,dy\,dz \text{。} \left(\text{依定義，}\cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\text{。}\right)$$

(提示：(1) 做適當的變數變換；(2) 你會算 $\iiint_B \cosh(x)\,dx\,dy\,dz$ 嗎？)

4. 請計算以下積分

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{3+\sin^2 x}\,dx\text{。}$$

5. 請證明

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1+x^4y^4z^4}\,dx\,dy\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(4n+1)^3}\text{。}$$

(在論證中若是你宣稱任何兩個數相等，請盡可能說明理由；若用到任何一個無窮級數，請務必說明它為何是收斂的。)

試題隨卷繳回